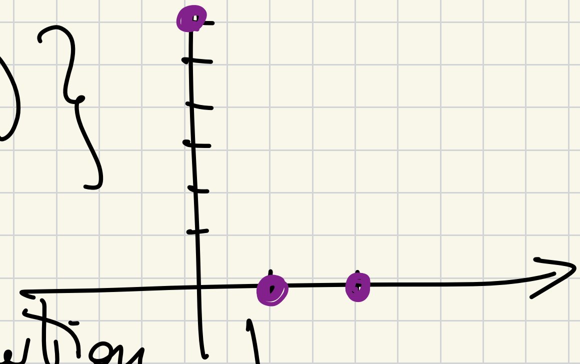
EXM Calculer la droite de régression linéaire pour la famille de points

$$\{(0,6),\ (1,0),\ (2,0)\}$$



Il faut trouver la pseudosolution de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

fixe

coordonnées x

coordonnées y

trouver la (vraie) solution de

$$A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A^T \cdot \bar{b}$$

i.e. $$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\ -1/2 & 5/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\ 5\end{pmatrix}$$

Alors la droite de régression est $\boxed{y = -3x + 5}$.

Chapitre 13 : Diagonalisation de matrices symétriques au moyen de matrices orthogonales

Déf. 13.1 (rappel de Déf. 5.5) On dit que $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est <u>symétrique</u> si $A^T = A$

Déf. 13.3 (rappel de Déf 11.39) On dit que $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est <u>orthogonale</u> si $P^T \cdot P = I_n$

Rq. 13.4 $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ orthogonale $\Rightarrow P$ inversible

(et $P^{-1} = P^T$!)

PROP 13.5 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$.

Alors

$$(A\bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot (A^T \bar{w})$$

En conséquence,

$$(A\bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{v} \cdot (A\bar{w})$$

si A symétrique.

COR 13.6 Si $P \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale,

alors $(P\vec{v}) \cdot (P\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$

THM 13.11 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

A symétrique $\Longleftrightarrow$ $\exists P \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale t.q. $P^T A P$ est diagonale

(Théorème spectral)

diagonalisation de A au moyen d'une matrice orthogonale P.

Comment calculer P ?

① Calculer les valeurs propres de A $\Longrightarrow$ racines de $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$

② Pour chaque valeur propre λ_j, on calcule une base de $E_{\lambda_j} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_j I_n)$

$\mathcal{B}'_j = \{\bar{w}^j_1, \dots, \bar{w}^j_{m_j}\}$

Nouvelle étape

③ On applique le procédé de GS à chaque $\mathcal{B}'_j$ pour trouver une bon de E_{λ_j} : $\mathcal{B}''_j = \{\bar{u}^j_1, \dots, \bar{u}^j_{m_j}\}$

④ La matrice $P = [\bar{u}_1^1 \dots \bar{u}_{m_1}^1 \quad \dots \quad \bar{u}_1^k \dots \bar{u}_{m_k}^k]$

s'il y a k valeurs propres différentes.

Orthogonale !!

$\boxed{\text{EXM } 13.18}$ Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

au moyen d'une matrice orthogonale.

① $P_A(\lambda) = -(\lambda-7)^2(\lambda+2)$ $\rightarrow \lambda = 7$ (mult 2), $\lambda = -2$ (mult 1)

$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98$

② $E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 18 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/18} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3/2 = 0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3/2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\} \text{ bon de } E_{-2} \text{ !!}$$

$$\underline{\mathrm{I}}_7 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ou } = \mathrm{Vect}\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\bar{w}_2} \right\}$$

3

GS

$$\longrightarrow \begin{cases} \bar{v}_1 = \bar{w}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \dfrac{\bar{w}_2 \cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \qquad = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \bar{u}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_2 = \frac{\bar{v}_2}{\|\bar{v}_2\|} = \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Base de $\mathbb{R}^3$ orthonormée : $\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4/3\sqrt{5} \\ 2/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \right\}$

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & -2/3 \end{pmatrix}$$ orthogonale

et

$$P^T.A.P = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{LEM. 13.9}}$ Soit A symétrique, $\bar{v}$ un vecteur propre de valeur propre λ et $\bar{w}$ un vecteur propre de valeur propre μ. Si $\lambda \neq \mu$, alors $\bar{v} \bullet \bar{w} = 0$

(Preuve) On rappelle que $\underbrace{(A\bar{v})}_{\lambda \bar{v}} \bullet \bar{w} = \bar{v} \bullet \underbrace{(A\bar{w})}_{\mu \cdot \bar{w}}$ (PROP 13.5),

$$\Rightarrow \lambda \; \bar{v} \bullet \bar{w} = \mu \; \bar{v} \bullet \bar{w}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \underbrace{\bar{v} \bullet \bar{w}}_{\Rightarrow = 0} = 0 \quad !! \longrightarrow \bar{v} \bullet \bar{w} = 0 \quad \square$$

$\boxed{\text{EXM}}$ Diagonaliser au moyen d'une matrice orthogonale la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$